Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 19, pp. 3–8. Pergamon Press 1976. Printed in Great Britain

PIONEER PAPER*

VERDUNSTUNG UND WÄRMEÜBERGANG†

ERNST SCHMIDT
Danzig-Langfuhr Vorgetragen auf der Tagung des Ausschusses für Wärmeforschung in Hannover am 20. April 1929

Zusammenfassung—Es werden aus den Differentialgleichungen der Wärmeleitung und der Diffusion in bewegten Medien Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Wärmeübergangserscheinungen und Verdunstungsvorgängen entwickelt. Die Ergebnisse werden benutzt, um die Erhöhung der Wärmeübergangszahl an kalten Flächen bei Schwitzwasserbildung zu berechnen.

ZWISCHEN Verdunstungs- und Wärmeübergangsvorgängen bestehen Ähnlichkeiten, die sich im gleichartigen Bau der Differentialgleichungen ausdrücken und die man benutzen kann, um die Ergebnisse von Versuchen der einen Erscheinungsgruppe auf die andere zu übertragen und umgekehrt. In dieser Weise hat z. B. Thoma [1] den Wärmeübergang an Rohrbündel aus Absorptionsversuchen erschlossen.

Eine wichtige theoretische Beziehung zwischen Wärmeübertragung und Verdunstung hat Lewis [2] abgeleitet. Er bildet entsprechend der Wärmeübergangszahl α den Begriff der Verdunstungsziffer κ und versteht darunter diejenige Flüssigkeitsmenge, welche je Quadratmeter und Stunde von einer Oberfläche verdunstet, wenn der Konzentrationsunterschied des diffundierenden Mediums an der verdunstenden Oberfläche und in großer Entfernung von ihr gleich (1) ist.

Die Lewissche Beziehung lautet:

$$\kappa = \frac{\alpha}{C_p},$$

wobei $C_p = \rho c_p$ die spezifische Wärme der Volumeneinheit des Mediums ist, in welches hinein die Verdunstung erfolgt.

In Deutschland ist die Lewissche Beziehung hauptsächlich durch die Untersuchungen Merkels [3] bekannt geworden, von dem auch ein zweiter Beweis des Lewisschen Satzes stammt. Beide Ableitungen setzen aber voraus, daß die Wärme- und Stoffübertragung ausschließlich durch turbulente Mischbewegung erfolgt. Die Lewissche Beziehung gilt daher nicht ohne weiteres für geordnete Strömungen, wie sie bei geringen Geschwindigkeiten und in ruhender Luft vorkommen.

In folgendem sollen an Hand der Differentialgleichungen des Verdunstungsvorganges die. Gültigkeitsgrenzen der Lewisschen Beziehung untersucht und die Bedingungen aufgestellt werden, unter denen insbesondere in ruhender Luft die Ergebnisse von Wärmeübergangsversuchen auf Verdunstungsvorgänge und umgekehrt übertragen werden können.

Wir stellen dazu die Grundgleichungen der Wärmeleitung und der Diffusion einander gegenüber. Es gilt für:

Wärmeleitung:

$$\mathrm{d}Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\,\mathrm{d}f \tag{1}$$

wobei

Q die Wärmemenge in kcal/h,
λ die Wärmeleitzahl in kcal/m h°C,
T die Temperature in ° abs.,

Diffusion:

$$\mathrm{d}W = -k \frac{\partial c}{\partial n}\,\mathrm{d}f \tag{1'}$$

W die verdunstende Menge in kmol/h‡,
k die Diffusionskonstante in m^2/h,
c die Konzentration des Dampfes in kmol/m^3,
f die Fläche in m^2,
n die Flächennormale,

bedeuten. Bezeichnet man weiter mit

$$a = \frac{\lambda}{C_p}$$

die Temperaturleitzahl, C die Konzentration des Gemisches in kmol/m^3,

$$\zeta = \frac{c}{C}$$

die relative Konzentration des Dampfes und schreibt die Gleichungen (1) and (1') in der Form

$$\mathrm{d}\left(\frac{Q}{C_p}\right) = -a \frac{\partial T}{\partial n}\,\mathrm{d}f \tag{2}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{W}{C}\right) = -k \frac{\partial \zeta}{\partial n}\,\mathrm{d}f \tag{2'}$$

*Originally published in *Gesundheits-Ingenieur* **52**, 525 (1929).

†Die Technische Hochschule Danzig-Langfuhr feiert in den Tagen vom 18. bis 20. Juli ihr 25 jähriges Bestehen. Es gereicht uns zur besonderen Freude, gelegentlich dieses festlichen Anlasses eine Arbeit aus ihrem Maschinenlaboratorium hier veröffentlichen zu können. Die Schriftleitung.

‡Nachdem man die Unterscheidung der Grammkalorie von der Kilogrammkalorie durch kleinen und großen Anfangsbuchstaben durch die Bezeichnungen cal und kcal ersetzt hat, sollte man entsprechend auch schreiben "mol" und "kmol" (gesprochen Kilomol).

so wird die Verwandtschaft noch vollständiger, denn die Temperaturleitfähigkeit a hat ebenso wie die Diffusionskonstante die Dimension m^2/h. Man kann also die Temperaturleitfähigkeit auch als die Diffusionskonstante der Temperatur ansehen.

Für den Wärme- und Mengenübergang kann man andererseits unter Benutzung der Begriffe "Wärmeübergangszahl" und "Verdunstungsziffer" schreiben:

$$\mathrm{d}\,Q = \frac{\alpha}{C_p}\, C_p(T_w - T_0)\,\mathrm{d}f \tag{3}$$

dabei ist

α die Wärmeübergangszahl in kcal/m²h °C,

$$\mathrm{d}\,W = \kappa C(\zeta_w - \zeta_0)\,\mathrm{d}f \tag{3'}$$

κ die Verdunstungsziffer in m/h

und die Indizes w und 0 kennzeichnen die Zustandsgrößen an der verdunstenden Oberfläche und in großer Entfernung von ihr. Sind die Abmessungen des Raumes, in welchen hinein die Verdunstung erfolgt, nicht troß gegen die verdunstende Fläche, so soll der Index 0 den Mittelwert der Zustandsgröße im Raum bezeichnen. Eliminiert man d Q und d W aus den Gleichungen (1) und (3), so ergibt sich, wenn man das Temperatur- und Konzentrationsgefälle an der Oberfläche durch den Index w bezeichnet:

$$\frac{\alpha}{C_p} = -a\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w \frac{1}{T_w - T_0} \tag{4}$$

$$\kappa = -k\left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right) \frac{1}{\zeta_w - \zeta_0}. \tag{4'}$$

In diesen Gleichungen treten auf den rechten Seiten die beiden Konstanten a und k auf und die linken Seiten haben die Dimension einer Geschwindigkeit. Man kann an Hand von Gleichung (3′) die Verdunstungsziffer deuten als die Geschwindigkeit, mit welcher das verdampfende Medium von der Dichte $C(\zeta_w - \zeta_0)$ durch die Verdunstungsfläche hindurchtritt. Ebenso könnte man den Ausdruck α/C_p in Gleichung (3) als die Geschwindigkeit auffassen, mit welcher ein gewichtsloses Energiegas von der Dichte $C_p(T_w - T_0)$ die wärmeabgebende Oberfläche durchsetzt, um in das wärmeaufnehmende Gas hineinzudiffundieren.

Ist das Feld der Temperatur T ähnlich dem Feld der Konzentration oder sind auch nur die Felder der Differenzen dieser Größen gegen ihren Wert in großer Entfernung, also die Größen $T - T_0$ und $\zeta - \zeta_0$ einander ähnlich, so ist

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w \frac{1}{T_w - T_0} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)_w \frac{1}{\zeta_w - \zeta_0}$$

und es folgt aus Gleichung (4)

$$\frac{\alpha}{C_p} : \kappa = a : k. \tag{5}$$

Ist außerdem $a = k$ und das ist, wie wir sehen werden, die notwendige Voraussetzung dafür, daß das Temperaturfeld dem Konzentrationsfeld ähnlich ist, so erhalten wir

$$\frac{\alpha}{C_p} : \kappa = 1 \tag{6}$$

also gerade die von Lewis aufgestellte Beziehung.

Es sollen nun die Differentialgleichungen im allgemeinen Fall der Verdunstung hingeschrieben werden. Dabei ist einige Vorsicht nötig bei der Definition der Geschwindigkeit. Wir dürfen sie nicht aus dem durch einen Querschnitt hindurchtretende Gasgewicht errechnen, sondern müssen die Geschwindigkeit auf die durch den Querschnitt hindurchtretende Molekülzahl beziehen. Denn in einem ruhenden Gas kann dadurch, daß die schweren Moleküle nach der einen Seite, die leichten nach der anderen Seite diffundieren, ein Massentransport auftreten, ohne daß eine Geschwindigkeit vorhanden ist.

Im allgemeinen Fall, also wenn die natürliche Konvektion nicht gegen eine aufgezwungene Strömung vernachlässigt werden kann, lauten die Differentialgleichungen eines stationären Vorganges, bei dem Wärmeübergang und Diffusion sich überlagern:

$$\rho\left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\Delta w_x + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\nabla w_x\right] \tag{7}$$

$$\rho\left(w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\Delta w_y + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\nabla w_y\right] \tag{8}$$

$$\rho\left(w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\Delta w_z + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\nabla w_z\right] \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(C w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(C w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(C w_z) = 0 \tag{10}$$

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\Delta T \tag{11}$$

$$w_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} = k\Delta \zeta \tag{12}$$

$$p = CRT \tag{13}$$

$$\rho = [\zeta m_1 + (1-\zeta) m_2]\cdot\frac{p}{RT}. \tag{14}$$

Dabei bedeuten:

w_x, w_y, w_z die Geschwindigkeitskomponenten,
ρ die Dichte,
μ die Zähigkeit.
g_x, g_y, g_z die Komponenten der Erdbeschleunigung,
p der Druck,
R die universelle Gaskonstante,
m_1 das Molekulargewicht des diffundierenden Mediums,
m_2 das Molekulargewicht des Gases, in welches hinein die Verdunstung erfolgt.

Die Gleichungen (7) bis (9) sind die bekannten Stokesschen Gleichungen für die Bewegung zäher Flüssigkeiten.

Gleichung (10) ist die Kontinuitätsgleichung, in die an Stelle der Dichte ρ die Konzentration C eingeführt ist, damit sie bei Diffusionsvorgängen ihre Gültigkeit behält.

Die Gleichungen (11) und (12) sind die Differentialgleichungen der Wärmeströmung und der Diffusion in bewegten Medien.

Die Gleichung (13) ist die Zustandgleichung des idealen Gases, die auch für das bei der Diffusion entstehende Gasgemisch als gültig angesehen werden kann.

Die Gleichung (14) gibt die Abhängigkeit der Dichte von der Konzentration ζ und der Temperatur T.

Die Gleichungen (11) und (12) zeigen zunächst, daß das Temperaturfeld dem Geschwindigkeitsfeld nur ähnlich sein kann, wenn die beiden Konstanten a und k einander gleich sind, wenn also

$$a:k = 1$$

ist. Leitet man also die Lewissche Beziehung aus der Ähnlichkeit der Felder der Geschwindigkeit und Temperatur ab, so wird dabei wie Gleichung (5) zeigt, ihre Gültigkeit in Wirklichkeit schon vorausgesetzt. Nun ist bei Wasser und Luft $a/k = 0{,}9$, also wenig von 1 verschieden und es ist daher bei der Wasserverdunstung die Lewissche Beziehung annähernd erfüllt. Bei anderen Diffusionsvorgängen kann aber dieser Quotient, der den Charakter einer dimensionslosen Kenngröße hat, von 1 recht verschiedene Werte annehmen.

Eine Zusammenstellung der Werte von a/k für einige Stoffe gibt Zahlentafel 1. Darin ist angenommen, daß der Teildruck der verdunstenden Flüssigkeit klein gegen den Gesamtdruck ist. Die Kenngröße a/k hängt von der Art des Gases ab, in welches hinein die Verdunstung erfolgt und ist um so größer je größer das Molekulargewicht des verdunstenden Mittels gegen das Molekulargewicht des Gases ist. Bei der Diffusion eines schweren Dampfes in ein leichtes Gas treten Werte von a/k bis zu 7 auf. Im umgekehrten Fall, also z. B. bei der Diffusion von Wasserstoff in Kohlensäure, sinkt der Wert auf 0,16.

Lewis gibt an, die Beziehung $\kappa = \alpha/C_p$ an befeuchteten Thermometern nicht nur bei Wasser sondern auch bei Toluol und Chlorbenzol als Befeuchtungsflüssigkeit bestatigt gefunden zu haben. Nach der in Zahlentafel 1 dargestellten Abhängigkeit der Kenngröße a/k vom Molekulargewicht der verdunstenden Flüssigkeit wird bei Toluol etwa $a/k = 2{,}8$, bei Chlorbonzol $a/k = 3{,}2$ sein und es sind daher Abweichungen von der Lewisschen Beziehung zu erwarten. Wenn diese von Lewis nicht gefunden wurden, so ist das wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß seine Versuche bei hoher Luftgeschwindigkeit ausgefürt wurden und daher Wärme und Dampf hauptsächlich durch turbulente Mischbewegung ausgetauscht wurden.

Die Anwendung der Ähnlichkeitsbetrachtungen auf den Wärmeübergang bei erzwungener Strömung ergibt bekanntlich [1], daß der Vorgang nur von den beiden Kenngrößen, die man nach Reynolds und Stanton bezeichnet:

$$Re = \frac{wl}{\nu} \quad \text{und} \quad St = \frac{a}{\nu}$$

abhängt.

Zahlentafel 1. Temperaturleitfähigkeit a und Diffusionskonstante k bei der Diffusion eines Stoffes vom Molekulargewicht m_1 in einem solchen vom Molekulargewicht m_2 bei 0° und 760 mm Hg. (Nach Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen, 5. Auflage)

Diffusion von	m_1	m_1/m_2	a (m/h)	k (m/h)	$\frac{a}{k}$
Isobutylisobutyrat in H_2	144	72,0	0,465	0,0679	6,85
Benzol in H_2	78	39,0	0,465	0,1051	4,42
Äthylalkohol in H_2	46	23,0	0,465	0,1360	3,42
Methylalkohol in H_2	32	16,0	0,465	0,1800	2,58
Kohlensäure in H_2	44	22,0	0,465	0,1958	2,37
Luft in H_2	29	14,5	0,465	0,238	1,95
Wasser in H_2	18	9,0	0,465	0,247	1,88
Isobutylisobutyrat in Luft	144	4,97	0,0654	0,0169	3,88
Benzol in Luft	78	2,69	0,0654	0,0270	2,43
Äthylalkohol in Luft	46	1,59	0,0654	0,0366	1,79
Methylalkohol in Luft	32	1,105	0,0654	0,0476	1,38
Kohlensäure in Luft	44	1,52	0,0654	0,0512	1,28
Wasser in Luft	18	0,622	0,0654	0,0712	0,916
Wasserstoff in Luft	2	0,069	0,0654	0,266	0,246
Isobutylisobutyrat in CO_2	144	3,28	0,0312	0,0132	2,362
Benzol in CO_2	78	1,78	0,0312	0,019	1,640
Äthylalkohol in CO_2	46	1,05	0,0312	0,0247	1,260
Methylalkohol in CO_2	32	0,73	0,0312	0,0317	0,980
Luft in CO_2	29	0,66	0,0312	0,0512	0,610
Wasser in CO_2	19	0,41	0,0312	0,0475	0,653
Wasserstoff in CO_2	2	0,045	0,0312	0,1936	0,161

Dabei ist

w eine kennzeichnende Geschwindigkeit,

l eine kennzeichnende Abmessung,

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die kinematische Zähigkeit.

Es läßt sich dann die Wärmeübergangszahl aller ähnlichen berandeten Fälle darstellen durch die Gleichung [4]

$$\frac{\alpha}{C_p} = \frac{a}{l}\Phi\left(\frac{wl}{\nu}, \frac{a}{\nu}\right). \tag{15}$$

Bei der Verdunstung in aufgezwungener Strömung tritt an die Stelle von a/ν die Kenngröße k/ν und die Verdunstungsziffer läßt sich schreiben

$$\kappa = \frac{k}{l}\Phi\left(\frac{wl}{\nu}, \frac{k}{\nu}\right) \tag{16}$$

wobei Φ in beiden Fällen dieselbe Funktion ist.

Man kann also aus den Ergebnissen eines Wärmeübergangsversuches ein Verdunstungsproblem von geometrisch ähnlicher Berandung und ähnlichen Grenzbedingungen berechnen, wenn die zwei Kenngrößen wl/ν und k/ν in beiden Fällen übereinstimmen. Dabei können aber die Einzelwerte, aus den sich die Kenngrößen zusammensetzen, voneinander verschieden sein. Ist $k = a$ und stimmen auch die Zähigkeiten überein, so kann man die Verdunstungsziffer aus Messungen der Wärmeübergangszahl an einem ähnlich berandeten Körper nach der Lewisschen Beziehung, Gl. (6) unmittelbar berechnen.

Bei der Behandlung der freien Strömung führt man statt des Gewichtes ρg zweckmäßig die Auftriebskraft ein, welche durch Erwärmung und bei Diffusionsvorgängen auch durch Konzentrationsänderung hervorgerufen wird. Man spaltet also vom Druckgradienten den Teil ab, der durch die Schwere der Flüssigkeit hervorgerufen ist und versteht unter p nur mehr den Druckunterschied gegen einen Punkt gleicher hydrostatischer Höhe in der ungestörten Flüssigkeit.

Legt man die positive X-Achse senkrecht nach oben in die Richtung des Auftriebes $g(\rho_0 - \rho)$, so gehen für ein Gas, in dem die Dichten im umgekehrten Verhältnis zur absoluten Temperatur stehen, die Differentialgleichungen (7) bis (9) bei einer Wärmeübertragung ohne Diffusion über in

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = g\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\Delta w_x + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\nabla w_x\right) \quad (7a)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\Delta w_y + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\nabla w_y\right) \quad (8a)$$

$$w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\Delta w_z + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\nabla w_z\right) \quad (9a)$$

Wendet man auf die Gleichungen (7a), (8a) und (11) Ähnlichkeitsbetrachtungen an und benutzt als kennzeichnende Temperatur die Temperatur T_w der wärmeabgebenden Fläche, so ergibt sich bekanntlich, daß der Wärmeübergang nur von den beiden Kenngrößen abhängt, die man nach Grashoff und Stanton zu bezeichnen pflegt:

$$Gr = \frac{l^3 g}{\nu^2}\left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \quad \text{und} \quad St = \frac{a}{\nu}. \quad (17)$$

Die Wärmeübergangszahl aller ähnlich berandeten Probleme läßt sich dann darstellen in der Form

$$\frac{\alpha}{C_p} = \frac{a}{l}\,\Theta\left(\frac{l^3 g}{\nu^2}\left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right), \frac{a}{\nu}\right). \quad (18)$$

Beim Diffusionsvorgang wird ein Auftrieb auch noch durch das diffundierende Medium hervorgerufen. Bezeichnen wir mit

- m das mittlere Molekulargewicht des Gemisches an irgendeiner Stelle,
- m_0 das mittlere Molekulargewicht des Gemisches vor Eindringen des diffundierenden Medums, also in weiter Entfernung von der Fläche, an welcher die Diffusion erfolgt,

so ist der Auftrieb

$$g(\rho_0 - \rho) = g\rho\left(\frac{m_0 T}{m T_0} - 1\right). \quad (19)$$

Führt man als kennzeichnende Temperatur T_w und als kennzeichnendes Molekulargewicht des Gemisches m_w die Werte an der verdunstenden Oberfläche ein, so tritt in den Ähnlichkeitsbetrachtungen an die Stelle der Graßhoffschen Kenngröße die neue Kenngröße

$$Gr' = \frac{l^3 g}{\nu^2}\left(\frac{m_0 T_w}{m_w T_0} - 1\right) \quad (20)$$

und im Fall des gleichzeitigen Auftretens von Wärmeabgabe und Verdunstung im gleichen Felde ist:

$$\frac{\alpha}{C_p} = \frac{a}{l}\,\Psi\left(\frac{l^3 g}{\nu^2}\left(\frac{m_0 T_w}{m_w T_0} - 1\right), \frac{a}{\nu}, \frac{k}{\nu}\right) \quad (21)$$

$$\kappa = \frac{k}{l}\,\Psi\left(\frac{l^3 g}{\nu_2}\left(\frac{m_0 T_w}{m_w T_0} - 1\right), \frac{k}{\nu}, \frac{a}{\nu}\right). \quad (22)$$

In beiden Ausdrücken hat die Funktion Ψ dieselbe Form, nur vertauschen die Größen k und a ihre Plätze. Ist $k = a$, so werden die beiden Ausdrücke identisch, und es gilt wieder die Lewissche Beziehung.

Die Gleichung (20) zeigt, daß die Größe Gr positive und negative Werte annehmen und auch zu Null werden kann. Bei positiven Werten, also bei $m_0 T_w / m_w T_0 > 1$ ist der Auftrieb nach oben gerichtet und die Konvektionsströmung steigt an der Fläche hoch. Bei negativen Werten dagegen sinkt die Luft, wie z. B. bei einem Eisblock, an der Oberfläche herunter. Bei $m_0 T_w / m_w T_0 = 1$ treten überhaupt keine Auftriebskräfte auf, und die Luft bleibt in Ruhe: Wärmeübergangszahl und Verdunstungsziffer werden daher in diesem Falle ein Minimum haben.

Das Auftreten dieses Minimums kann man leicht durch folgenden Versuch zeigen:

Hängt man eine mit Wasser von Lufttemperatur getränkte Tonplatte in trockener Luft auf, so kühlt sie sich ab und verliert zugleich durch Verdunstung an Gewicht. Beobachtet man den zeitlichen Verlauf der Temperatur und des Gewichtes, so findet man für die Temperatur nicht eine glatte Kurve vom Charakter der Exponentialfunktion, wie sie z. B. bei Abkühlung einer trockenen Tonplatte auftreten würde, sondern die Kurve weist einen deutlichen Knick auf. Eine ähnliche Störung zeigt die Kurve der Gewichtsabnahme.

In Abb. 1 ist das Ergebnis eines solchen Versuches an einer wassergetränkten Tonplatte von $6 \times 6 \times 1\,\text{cm}^3$ Größe, die senkrecht in ruhiger Luft aufgehängt war, dargestellt. Kurve a der Abbildung gibt den zeitlichen Verlauf der Temperatur t der Plattenoberfläche. Kurve b gibt die verdunstende Wassermenge an. Kurve a' ist der Differentialquotient $dt/d\tau$ der Kurve a und demnach die Geschwindigkeit des Absinkens der Temperatur. Kurve b' wurde in gleicher Weise durch Differenzieren aus b gewonnen und gibt die Verdunstungsgeschwindigkeit $dW/d\tau$ an. Die Bedingungen des Versuches, der von meinem Assistenten Herrn Dipl.-Ing. Hilpert durchgeführt wurde, waren noch nicht genügend konstant, um eine genaue zahlenmäßige Auswertung zu gestatten, aber das Minimum der Verdunstung und der Temperaturabnahme je Zeiteinheit und die Haltepunkte an den Kurven der Temperatur und des Gewichtes kommen deutlich zum Ausdruck.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist die folgende: Solange die Temperatur der Platte nur wenig von der umgebenden Luft abweicht, wird diese durch Auf-

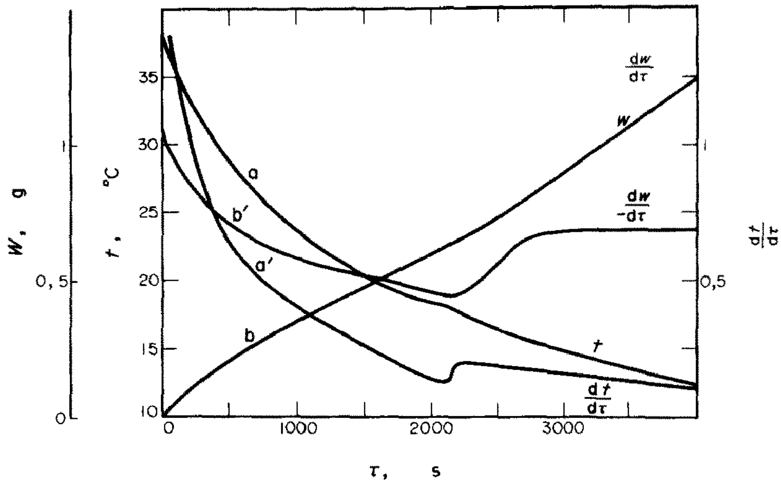

ABB. 1. Zeitlicher Verlauf der Temperatur t und der Wasserabgabe W durch Verdunstung bei einer feuchten Tonplatte bei 19°C und 12% relativer Eeuchtigkeit der Luft.

nahme von Wasserdampf leichter und steigt an der Tonplatte auf. Durch Verdunstung kühlt sich die Platte langsam ab und dadurch wird die sie berührende Luft schwerer bis schließlich die Erleichterung durch Wasserdampfaufnahme der Gewichtsvermehrung durch Kühlung die Waage hält.

In diesem Punkte erreichen Wärmeübergangszahl und Verdunstungsziffer ein Minimum. Es werden daher an dieser Stelle Änderungen von Temperatur und Gewicht langsamer verlaufen. Bei weiterer Abkühlung überwiegt der Einfluß det Temperaturabnahme und die Luft beginnt an der Platte herunter zu sinken. Die Kurven verlaufen wieder steiler, bis schließlich die Temperatur ihren Endwert erreicht hat, und der Gewichtsverlust konstant geworden ist.

Die Verdunstung verläuft also in genügend trockener Luft bei tieferer Temperatur schneller als im Haltepunkt, und man erhält die überraschende Tatsache, daß eine schwache Beheizung, welche die Temperatur des verdunstenden Körpers gerade von der Temperatur des feuchten Thermometers auf den Haltepunkt steigert, die verdunstende Menge vermindert.

Vollziehen sich Wärmeübergang und Verdunstung nicht in demselben Felde, sondern will man aus einem Wärmeübergangsproblem ohne Diffusion auf ein reines Diffusionsproblem ohne Wärmeströmung schließen, so ist das nur zulässig, wenn die Kenngrößen in beiden Fällen übereinstimmen.

Für den Wärmeübergang bei freier Strömung gilt

$$\frac{\alpha}{C_p} = \frac{a}{l}\,\Theta\left(\frac{l^3 g}{v^2}\left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right), \frac{a}{v}\right). \tag{18}$$

Bei reiner Verdunstung ist entsprechend

$$\kappa = \frac{k}{l}\,\Theta\left(\frac{l^3 g}{v^2}\left(\frac{m_0}{m_w} - 1\right), \frac{k}{v}\right) \tag{23}$$

wobei die Funktion Θ in beiden Fällen dieselbe Gestalt hat. Man kann daher die Verdunstungsziffer aus der Wärmeübergangszahl eines gleichberandeten Problems nach der Gleichung

$$\kappa = \frac{k}{a}\frac{\alpha}{C_p} \tag{24}$$

berechnen, wenn die Kenngrößen in beiden Fällen übereinstimmen. Bezeichnen wir Längenabmessung und Zähigkeit beim Wärmeübergang durch den Index 1, bei der Verdunstung durch den Index 2, so lauten die Bedingungen für die Ähnlichkeit der beiden Felder

$$\frac{l_1^3 g}{v_1^2}\left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) = \frac{l_2^3 g}{v_2^2}\left(\frac{m_0}{m_w} - 1\right) \tag{25}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{k}{v_2}. \tag{26}$$

Wir haben bisher angenommen, daß die Stoffeigenschaften ρ, v, a und k konstante Größen seien. In Wirklichkeit hängen sie aber alle mehr oder weniger von der Temperatur oder der Konzentration des Dampfes ab. Die vorliegenden Ähnlichkeitsbetrachtungen gelten daher genau nur bei kleinen Unterschieden der Temperatur oder Konzentration. Stellt man nach dem Vorgang Nusselts die Änderung der Stoffeigenschaften als eine Funktion von T/T_0 dar, so geht dises Verhältnis der absoluten Temperaturen an zwei kennzeichnenden Stellen als weitere Kenngröße in die Wärmeübergangszahl ein, und die Gleichung (18) kann in der Form

$$\frac{\alpha}{C_p} = \frac{a}{l}\,\Theta'\left(\frac{l^3 g}{v^2}, \frac{a}{v}, \frac{T_w}{T_0}\right) \tag{27}$$

geschrieben werden. Ähnliches tritt bei der Verdunstung ein, wenn die Stoffeigenschaften sich mit dem Konzentrationsverhältnis, oder, was das gleiche bedeutet, mit dem mittleren Molekulargewicht ändern. Die Gleichung (23) nimmt dann die Form

$$x = \frac{k}{l}\,\Theta'\left(\frac{l^3 g}{v^2}, \frac{k}{v}, \frac{m_0}{m_w}\right) \tag{28}$$

an.

Die vorstehenden Überlegungen erlauben eine besonders für die Heizungs- und Lüftungstechnik wichtige Anwendung auf die Wärmeübertragung durch Schwitzwasserbildung. An kalte Flächen wird von genügend feuchter Luft Wärme bekanntlich nicht allein durch Berührung und Strahlung, sondern auch durch Kondensieren von Wasserdampf übertragen, was sich als Schwitzwasserbildung an Fenterscheiben und an Wänden ungenügenden Wärmeschutzes bemerkbar macht.

Der Betrag dieser zusätzlichen Wärmeübertragung durch Kondensation läßt sich aus den vorliegenden Messungen der Wärmeübergangszahl durch Berührung bei verschiedenen Temperaturen berechnen, wenn man von dem bisher noch nicht näher untersuchten Einfluß der Kenngrößen a/v und k/v in den empirischen Funktionen absieht.

Für ebene Wände ist die Wärmeübergangszahl durch Berührung nach Nusselt [5]

$$\alpha = 2{,}2\sqrt[4]{(T_0 - T_w)} = 2{,}2\sqrt[4]{(T_0)}\sqrt[4]{\left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right)} \quad (29)$$

wobei T_0 die Lufttemperatur und T_w die kältere Wandtemperatur bedeutet. Treten zugleich Diffusionserscheinungen auf, so ändert sich die Wärmeübergangszahl und geht über in

$$\alpha' = 2{,}2\sqrt[4]{(T_0)}\sqrt[4]{\left(1 - \frac{T_w}{T_0}\frac{m_0}{m_w}\right)} \quad (30)$$

wobei

m_0 das mittlere Molekulargewicht der Luft in genügender Entfernung und

m_w das mittlere Molekulargewicht des gesättigten Luft an der Wand ist.

Die Verdunstungsziffer oder, wie man hier richtiger sagen müsste, die Kondensationsziffer wird dann nach Gleichung (21) und (22)

$$\kappa = \frac{k\alpha'}{aC_p} = \frac{2{,}2\,k}{C_p a}\sqrt[4]{(T_0)}\sqrt[4]{\left(1 - \frac{T_w}{T_0}\frac{m_0}{m_w}\right)}. \quad (31)$$

Die an der Fläche f kondensierte Wassermenge ist nach Gl. (3')

$$W = \kappa C(\zeta_0 - \zeta_w) f\left[\frac{\text{k mol}}{\text{h}}\right] = 18\kappa C(\zeta_0 - \zeta_w) f\left[\frac{\text{kg}}{\text{h}}\right]$$

und es wird, wenn r die Verdampfungswärme bedeutet, durch Kondensation die Wärmemenge rW übertragen.

Schreibt man die Kondensationswärme als Produkt $rW = \alpha_k(T_0 - T_w)\,f$ einer scheinbaren Wärmeübergangszahl α_k der Kondensation, der Temperaturdifferenz und der Fläche, so wird

$$\alpha_k = 18\kappa r C\frac{\zeta_0 - \zeta_w}{T_0 - T_w}. \quad (32)$$

Faßt man zum Schluß die gesamte übergehende Wärmemenge durch eine resultierende Wärmeübergangszahl α_r zusammen so gilt für diese die Gleichung

$$\alpha_r = \alpha' + \alpha_k$$
$$= \alpha\sqrt[4]{\frac{1 - \dfrac{T_w}{T_0}\dfrac{m_0}{m_w}}{1 - \dfrac{T_w}{T_0}}}\left(1 + 18\frac{r}{C_p}\frac{k}{a}C\frac{\zeta_0 - \zeta_w}{T_0 - T_w}\right). \quad (33)$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl in feuchter Luft bei Auftreten von Schwitzwasser auf die bekannten Werte der Wärmeübergangszahl α in trockener Luft zurückgeführt.

Die vorstehenden Überlegungen gelten für geringe Konzentrationsunterschiede im Diffusionsfelde. Ist die Temperatur der kalten Fläche so niedrig, daß vor ihr Nebelbildung eintritt, wie mann das z. B. an Kälteleitungen beobachten kann, so läßt sich die Erscheinung nicht mehr auf den Wärmeübergang in trockener Luft zurückführen, und es sind besondere Untersuchungen nötig.

REFERENCES

1. H. Thoma, *Hochleistungskessel.* Springer, Berlin (1921).
2. W. K. Lewis, The evaporation of a liquid into a gas, *Mech. Engng* **44**(7), 445 (1922).
3. F. Merkel, Verdunstungskühlung, *ForschHft. Ver. Dt. Ing.* No. 275 (1925).
4. W. Nusselt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges, *Gesundheits Ingenieur* **38**, 477–482, 490–496 (1915).
5. W. Nusselt, Die Wärmeleitfahigkeit von Wärmeschutzstoffen, *ForschHft. Ver. Dt. Ing.* No. 63/64 (1907).